Variations sur un theme de Danskin avec une coda sur un theme de Von Neuman

Pierre Bernhard

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1238

Programme 7
Calcul Scientifique,
Logiciels Numériques et Ingénierie Assistée

VARIATIONS SUR UN THEME DE DANSKIN AVEC UNE CODA SUR UN THEME DE VON NEUMAN

Pierre BERNHARD

Juin 1990

RR_1238

VARIATIONS SUR UN THÈME DE DANSKIN AVEC UNE CODA SUR UN THÈME DE VON NEUMAN

Pierre BERNHARD
INRIA Sophia Antipolis

mars 1990

Résumé. On donne divers versions du théorème de Danskin, (amélioré), concernant la dérivation d'une fonction $\bar{J}(u) = \sup_v J(u,v)$, y compris des versions en analyse convexe, donnant le sous-différentiel de $\bar{J}$. On donne comme application une démonstration simple des théorèmes de Von Neuman et Sion concernant l'égalité du sup inf et de l'inf sup d'une fonction convexe concave.

VARIATIONS ON A THEME OF DANSKIN WITH A CODA ON A THEME OF VON NEUMAN

Pierre BERNHARD
INRIA Sophia Antipolis

march 1990

Abstract We give several versions of a theorem of Danskin about the differentiation of a function $\bar{J}(u) = \sup_v J(u,v)$, including versions in convex analysis, giving the subdifferential of $\bar{J}$. As an application, we give a simple derivation of Von Neuman and Sion's theorems about the equality of the sup inf and the inf sup of a convex concave function.

0. INTRODUCTION.

Dans la référence [1], Danskin prouve le théorème suivant.

Hypothèses. Soit V un espace topologique *compact*, et J une application de $\mathbb{R}^n \times V$ dans $\mathbb{R}$, supposée conjointement continue, et C^1 par rapport à la première variable.

On pose alors

$$\bar{J}(u) = \max_{v \in V} J(u,v),$$

et

$$\hat{V}(u) = \{v \in V | J(u,v) = \bar{J}(u)\}.$$

Le théorème annoncé s'énonce:

Théorème 0. *(Danskin) La fonction $\bar{J}$ admet pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ une dérivée directionnelle dans la direction h donnée par*

$$D\bar{J}(u;h) = \max_{v \in \hat{V}} \sum_{i=1}^{n} h_i J_i(u,v),$$

où la notation J_i désigne la dérivée partielle de J par rapport à la coordonnée u_i de u.

Nous noterons $D_1 J(u,v;h)$ la dérivée directionnelle de $u \mapsto J(u,v)$ dans la direction h, de sorte que l'égalité ci-dessus s'écrit aussi

$$D\bar{J}(u;h) = \max_{v \in \hat{V}} D_1 J(u,v;h). \tag{0}$$

La suite de ce rapport est consacrée à démontrer des améliorations du théorème ci-dessus, d'une part en allégeant les hypothèses, et d'autre part en en donnant des équivalents en analyse convexe, en termes de sous-différentiel.

On montrera aussi que le théorème de Von Neuman sur l'égalité du min max et du max min, (ou de l'inf sup et du sup inf), peut être vu comme un corollaire simple d'une version "convexe-concave" du théorème de Danskin.

Cadre général. Le cadre suivant est commun à tout ce qui suit, et ne sera donc pas répété avec chaque énoncé de théorème.

U et V sont des sous-ensembles d'un espace de Banach $\mathcal{U}$ et d'un espace topologique $\mathcal{V}$ respectivement. J est une application de $U \times V$ dans $\mathbb{R}$. La dérivée directionnelle de $u \mapsto J(u,v)$ dans une direction h de $\mathcal{U}$ est notée $D_1 J(u,v;h)$, et son sous-différentiel sera noté $\partial_1 J(u,v)$. Enfin, on posera

$$\bar{J}(u) = \sup_{v \in V} J(u,v), \tag{1}$$

et, quand il existera,

$$\hat{V}(u) = \{v \in V \mid J(u,v) = \bar{J}(u)\}. \tag{2}$$

À défaut, on notera

$$\mathcal{W}(u) = \big\{\{v_n\} \mid J(u,v_n) \to \bar{J}(u) \text{ quand } n \to \infty\big\}$$

l'ensemble des suites $\{v_n\}$ maximisantes en u.

On s'interessera à la dérivée directionnelle $D\bar{J}(u;h)$ de $\bar{J}$, ou à son sous-différentiel $\partial\bar{J}(u)$.

1. LE CAS DIFFÉRENTIABLE.

1.1 V COMPACT.

Nous énonçons ici une version un peu affinée du théorème 0 ci-dessus.

Hypothèses D1.

D1.0 V est compact.

Soit $u \in U$ et $h \in \mathcal{U}$ tel que pour tout t dans un voisinage droit de 0, $u + th \in U$. Supposons en outre que

D1.1 $\forall v \in V$, l'application $(t, v) \mapsto J(u+th, v)$ est semi-continue supérieurement au point $(0, v)$,

D1.2 $\forall v \in V$ et $\forall t$ dans un voisinage droit de 0, il existe une dérivée directionnelle bornée

$$D_1(u + th, v; h) = \lim_{\tau \to 0^+} \frac{1}{\tau}\left[J(u + (t + \tau)h, v) - J(u + th, v)\right],$$

D1.3 de plus l'application $(t, v) \mapsto D_1 J(u + th, v)$ est semi-continue supérieurement au point $(0, v)$.

Théorème D1. *Sous les hypothèses D1, la fonction $\bar{J}$ admet en u une dérivée directionnelle dans la direction h, donnée par la formule (0) ci-dessus: (répétée ici pour la commodité de lecture)*

$$D\bar{J}(u;h) = \max_{v \in \hat{V}(u)} D_1 J(u, v; h).$$

Démonstration. Remarquons que par l'hypothèse D1.3, l'application $v \mapsto D_1 J(u, v; h)$ est s.c.s., de sorte que, V étant ici supposé compact, le max existe.

Posons, pour la commodité,

$$\Delta(t) = \frac{1}{t}\left[\bar{J}(u + th) - \bar{J}(u)\right]. \tag{1.1}$$

Proposition 1. On a

$$\liminf_{t \to 0} \Delta(t) \geq \max_{v \in \hat{V}(u)} D_1 J(u, v; h).$$

Preuve. Soit $\hat{v} \in \hat{V}(u)$. On a par définition $\bar{J}(u) = J(u, \hat{v})$, et $\bar{J}(u + th) \geq J(u + th, \hat{v})$. Donc

$$\Delta(t) \geq \frac{1}{t}\left[J(u + th, \hat{v}) - J(u, \hat{v})\right].$$

En passant à la liminf, on obtient

$$\liminf_{t \to 0} \Delta(t) \geq D_1 J(u, \hat{v}),$$

et puisque $\hat{v}$ était quelconque dans $\hat{V}(u)$, le résultat annoncé dans la proposition.

Proposition 2. Soit $\{t_n\}$ une suite de réels positifs tendant vers zéro, et, pour tout n, $v_n \in \hat{V}(u + t_n h)$. Alors

$$v_n \to \hat{V}(u), \quad \text{et} \quad J(u + t_n h, v_n) \to \bar{J}(u).$$

(On dit que l'application $t \mapsto \hat{V}(u + th)$ est s.c.s. en 0.)

Preuve. La proposition 1 implique entre autres choses que $\Delta(t_n)$ est borné inférieurement: $\exists a$ tel que pour n suffisamment grand, $\Delta(t_n) \geq a$. Donc aussi,

$$\bar{J}(u + t_n h) \geq \bar{J}(u) + a t_n.$$

Donc, $\liminf \bar{J}(u + t_n h) \geq \bar{J}(u)$. V est compact. Soit donc $\bar{v}$ un point d'accumulation de la suite $\{v_n\}$. On a

$$\bar{J}(u) \geq J(u, \bar{v}) \geq \limsup J(u + t_n h, v_n) \geq \liminf J(u + t_n h, v_n) \geq \bar{J}(u).$$

La première inégalité par définition de $\bar{J}$, la seconde par l'hypothèse D1.1, la dernière par ce qui vient d'être dit juste avant. Donc on a des égalités partout, d'où on déduit que $\bar{v} \in \hat{V}(u)$, et l'existance de la limite $\lim J(u + t_n h, v_n) = \bar{J}(u)$.

Proposition 3.

$$\limsup_{t \to 0} \Delta(t) \leq \max_{v \in \hat{V}(u)} D_1 J(u, v; h).$$

Preuve. Avec les mêmes notations qu'à la proposition 2, on a

$$\Delta(t_n) = \frac{1}{t_n}\left[J(u + t_n h, v_n) - J(u, v_n)\right] + \frac{1}{t_n}\left[J(u, v_n) - \bar{J}(u)\right].$$

Le deuxième terme est négatif par définition de $\bar{J}$, d'où

$$\Delta(t_n) \leq \frac{1}{t_n}\left[J(u + t_n h, v_n) - J(u, v_n)\right].$$

Mais $t \mapsto J(u + th, v_n)$ ayant pour tout $t \in [0, t_n]$ une dérivée directionnelle bornée, elle est absolument continue, et il existe donc $t'_n \in [0, t_n]$ tel que

$$D_1 J(u + t'_n h, v_n; h) \geq \frac{1}{t_n}\left[J(u + t_n h, v_n) - J(u, v_n)\right],$$

soit $\Delta(t_n) \leq D_1 J(u + t'_n h, v_n; h)$. Grâce à l'hypothèse D1.3, on a en passant à la limsup

$$\limsup \Delta(t_n) \leq D_1 J(u, \bar{v}; h).$$

où $\bar{v}$ est tout point d'accumulation de la suite $\{v_n\}$. Par la proposition 2, $\bar{v} \in \hat{V}(u)$, et on a donc a fortiori le résultat annoncé.

Finalement, les propositions 1 et 3 ensemble prouvent le théorème.

Corollaire. *Si $u \mapsto J(u,v)$ admet une dérivée de Gâteau, J'_u et si $\hat{V}(u)$ est réduit à un singleton $\{\hat{v}\}$, alors $\bar{J}$ admet une dérivée de Gâteau $\bar{J}'(u)$, donnée par*

$$\bar{J}'(u) = J'_u(u,\hat{v}).$$

Démonstration. Celà découle immédiatement du théorme 1 et du fait que dans ce cas, $D_1 J(u,v;h) = J'_u(u,v).h$ et donc aussi

$$D\bar{J}(u;h) = J'_u(u,\hat{v}).h.$$

1.2 CAS UNIFORME.

On peut échanger l'hypothèse de compacité de V pour de l'uniformité, par exemple de la façon suivante. u et h sont choisis comme en D1.

Hypothèses D2.
D2.1 L'application $v \mapsto J(u,v)$ est uniformément directionnellement dérivable, au sens suivant:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \tau > 0 : \forall t \in (0,\tau), \forall v \in V, \quad \left| \frac{1}{t}[J(u+th,v) - J(u,v)] - D_1 J(u,v;h) \right| \leq \epsilon.$$

D2.2 La dérivée directionnelle $D_1 J(u+th,v;h)$ est bornée en module dans un voisinage droit de 0 en t, uniformément en $v \in V$.
D2.3 L'application $t \mapsto D_1 J(u+th,v;h)$ est semi-continue supérieurement au point 0, uniformément en $v \in V$.

Théorème D2. *Sous les hypothèses D2, pour tout t dans un voisinage gauche fermé de 0, il existe $\bar{J}(u+th) < \infty$, et $\bar{J}$ admet une dérivée directionnelle en u dans la direction h, donnée par*

$$D\bar{J}(u;h) = \sup_{\{v_k\} \in \mathcal{W}(u)} \limsup_{k \to \infty} D_1 J(u,v_k;h).$$

Démonstration. Appelons D le deuxième membre de l'expression ci-dessus, et définissons $\Delta(t)$ comme en (1.1). Dans tout ce qui suit on a choisi deux suites de nombres positifs $\{t_n\}$ et $\{\epsilon_n\}$ telles que $t_n \to 0$ et $\epsilon_n / t_n \to 0$ quand $n \to \infty$. (Par exemple, $\epsilon_n = t_n^2$).

Proposition 1. $\liminf \Delta(t_n) \geq D$.

Preuve. Soit δ un nombre positif donné. Choisissons N tel que $\forall n > N$, on ait

$$\frac{\epsilon_n}{t_n} < \frac{\delta}{3}, \tag{i}$$

et

$$\forall v \in V, \quad \frac{1}{t_n}[J(u+t_n h,v) - J(u,v)] \geq D_1 J(u,v;h) - \frac{\delta}{3}. \tag{ii}$$

Ceci est possible par l'hypothèse D2.1. Par ailleurs, soit $\{v_k\} \in \mathcal{W}$ une suite maximisante en u,

$$\forall n, \exists K_n : \forall k > K_n, \quad J(u, v_k) \geq \bar{J}(u) - \epsilon_n.$$

Donc, $\forall n > N, \forall k > K_n$,

$$\Delta(t_n) \geq \frac{1}{t_n}\left[\bar{J}(u + t_n h) - J(u, v_k)\right] - \frac{\epsilon_n}{t_n} \geq \frac{1}{t_n}\left[J(u + t_n h, v_k) - J(u, v_k)\right] - \frac{\delta}{3}.$$

Par ii), $\forall k > K_n, \Delta(t_n) \geq D_1 J(u, v_k) - 2\delta/3$. En faisant tendre k vers l'infini, on en déduit $\Delta(t_n) \geq \limsup D_1 J(u, v_k; h) - 2\delta/3$. Mais comme $\{v_k\}$ est une suite maximisante arbitraire, elle peut être choisie telle que $\limsup D_1 J(u, v_k; h) \geq D - \delta/3$. Ainsi on a que $\forall n > N$, $\Delta(t_n) \geq D - \delta$, ce qui établit la proposition, compte tenu du fait que δ était un nombre positif arbitraire.

Proposition 2. On construit une suite $\{v_n\}$ d'éléments de V telle que,

$$\forall n > 0, \quad J(u + t_n h, v_n) \geq \bar{J}(u + t_n h) - \epsilon_n. \tag{1.2}$$

Alors $\{v_n\} \in \mathcal{W}(u)$.

Preuve. On a

$$\bar{J}(u) \geq J(u, v_n) \geq J(u + t_n h, v_n) - t_n D_1 J(u, v_n; h) - t_n \eta_n,$$

où $\eta_n \to 0$ par l'hypothèse D2.1, et $D_1 J$ étant borné par l'hypothèse D2.2, on a aussi

$$\bar{J}(u) \geq J(u, v_n) \geq J(u + t_n h, v_n) - \delta_n, \qquad \delta_n \to 0.$$

En utilisant la définition (1.2) de la suite $\{v_n\}$, puis la proposition 1 qui implique que $\bar{J}(u + t_n h) \geq \bar{J}(u) + \gamma_n$ où $\gamma_n \to 0$, on a finalement

$$\bar{J}(u) \geq J(u, v_n) \geq \bar{J}(u) - \delta_n - \epsilon_n + \gamma_n \to \bar{J}(u),$$

ce qui établit la proposition.

Proposition 3. $\limsup \Delta(t_n) \leq D$.

Preuve. Par la définition de la suite $\{v_n\}$, (1.2), on a

$$\Delta(t_n) \leq \frac{1}{t_n}\left[J(u + t_n h, v_n) - \bar{J}(u)\right] + \frac{\epsilon_n}{t_n} \leq \frac{1}{t_n}\left[J(u + t_n h, v_n) - J(u, v_n)\right] + \frac{\epsilon_n}{t_n}. \tag{1.3}$$

Comme dans la démonstration du théorème D1, par l'hypothèse D2.2, il existe $t'_n \in [0, t_n]$ tel que

$$D_1 J(u + t'_n h, v_n; h) \geq \frac{1}{t_n}\left[J(u + t_n h, v_n) - J(u, v_n)\right].$$

En outre, par l'hypothèse D2.3, pour n suffisamment grand

$$D_1 J(u + t'_n h, v_n; h) \leq D_1 J(u, v_n; h) + \eta_n, \qquad \eta_n \to 0,$$

de sorte que finalement, en associant (1.3) et cette dernière inégalité,

$$\Delta(t_n) \leq D_1 J(u, v_n; h) + \frac{\epsilon_n}{t_n} + \eta_n,$$

et en passant à la limsup,

$$\limsup \Delta(t_n) \leq \limsup D_1 J(u, v_n; h) \leq D.$$

La dernière inégalité, qui finit de montrer la proposition, parceque par la proposition 2, $\{v_n\} \in \mathcal{W}(u)$.

Finalement, les propositions 1 et 3 ensemble démontrent le théorème.

2. LE CAS CONVEXE.

Nous donnons maintenant des versions en analyse convexe des deux théorèmes précédents.

Si on se souvient que pour une fonction convexe f, la fonction $h \mapsto Df(u; h)$ est la fonction support du sous-différentiel $\partial f(u)$, les conclusions des théorèmes "convexes" sont identiques (au moins dans le cas compact, très voisines autrement), à celles des théorèmes "différentiables". En outre, une fonction convexe continue ayant des dérivées directionnelles, les hypothèses des deux théorèmes ci-dessous sont trés voisines de celles faites dans la partie 1. Une apparente simplification des hypothèses de régularité des dérivées fait qu'il n'est pas clair que ces nouvelles hypothèse soient strictement plus fortes. (Ce qui ferait des théorèmes ci-dessous des corollaires stricts des précédents.)

En tout état de cause, nous choisissons de rédiger les preuves indépendemment des précédentes, pour utiliser les outils de l'analyse convexe qui sont naturels dans ce contexte.

2.1 V COMPACT.

Hypothèses C.

C0 V est (séquentiellement) compact dans une topologie où $\forall u \in U$, l'application $v \mapsto J(u, v)$ est s.c.s.

C1 U est convexe et $\forall v \in V$, la fonction $u \mapsto J(u, v)$ est convexe. On note $\partial_1 J(u, v)$ son sous-différentiel.

C2 Il existe $u_0 \in U$. un voisinage $\tilde{U}$ de u_0 et un réel a tels que $\forall (u, v) \in \tilde{U} \times V$, $J(u, v) \leq a$.

On remarque que l'hypothèse C2 implique que $\forall \tilde{u} \in \tilde{U}, \bar{J}(\tilde{u}) \leq a$. On introduit donc la définition suivante :

Définition. On notera U_0 l'interieur de l'ensemble où $\bar{J}$ est finie.

Lemme 1. *L'hypothèse C2 ci-dessus peut être remplacée par l'hypothèse C2a ci-dessous:*

C2a Soit $u_0 \in U$. Il existe un voisinage $\tilde{U}$ (qu'on prendra borné) de u_0 et un réel b tels que

$$\forall \tilde{u} \in \tilde{U}, \forall v \in V, \exists \tilde{p} \in \partial_1 J(\tilde{u}, v) \text{ avec } \|\tilde{p}\| \leq b$$

Démonstration. Montrons que C2a et $\bar{J}(u_0) \leq \infty$ impliquent C2. Soit η tel que $\tilde{u} \in \tilde{U}$ implique $\|\tilde{u} - u\| \leq \eta$. On a, $\forall(\tilde{u}, v) \in \tilde{U} \times V$, et avec $\tilde{p} \in \partial_1 J(\tilde{u}, v)$, choisi tel que $\|\tilde{p}\| \leq b$,

$$\bar{J}(u_0) \geq J(u_0, v) \geq J(\tilde{u}, v) - (\tilde{p}, \tilde{u} - u_0)$$

soit

$$J(\tilde{u}, v) \leq \bar{J}(u_0) + (\tilde{p}, \tilde{u} - u_0) \leq \bar{J}(u_0) + b\eta.$$

Théorème C1. *Sous les hypothèses C, la fonction $\bar{J}$ est convexe continue sur U_0 et admet en tout point u de U_0 (notamment en u_0) un sous-différentiel donné par*

$$\partial \bar{J}(u) = \overline{co} \bigcup_{v \in \hat{V}(u)} \partial_1 J(u, v).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que comme enveloppe supérieure de fonctions convexes, $\bar{J}$ est convexe. Par C2, elle est bornée sur un voisinage de u_0, donc continue en u_0, et donc aussi sur tout U_0, fournissant à son tour un majorant uniforme de $J(u, v)$ au voisinage de tout point de U_0. Donc $\partial \bar{J}$ et $\partial_1 J$ existent partout dans U_0, et par C0, $\hat{V}(u)$ existe aussi, de sorte que la formule ci-dessus à un sens.

Remarquons aussi que la preuve classique du fait qu'une fonction convexe localement majorée est continue implique ici que $u \mapsto J(u, v)$ est continue *uniformément en v*, puisque la borne supérieure est uniforme. Il en résulte facilement, avec l'hypothèse C0, que l'application $(u, v) \mapsto J(u, v)$ est s.c.s.

Proposition 1. On a

$$\partial \bar{J}(u) \supset \overline{co} \bigcup_{v \in \hat{V}(u)} \partial_1 J(u, v).$$

Preuve. Soit $\hat{v} \in \hat{V}(u)$, et $p \in \partial_1 J(u, \hat{v})$. Alors,

$$\forall w \in U, \quad J(w, \hat{v}) \geq J(u, \hat{v}) + (p, w - u) = \bar{J}(u) + (p, w - u),$$

et donc

$$\forall w \in U, \quad \bar{J}(w) \geq \bar{J}(u) + (p, w - u),$$

c'est à dire que $p \in \partial \bar{J}(u)$. Comme $\hat{v}$ était choisi quelconque dans $\hat{V}$, et p dans $\partial_1 J(u, \hat{v})$, on en déduit que $\partial \bar{J}(u)$ contient l'union des sous-différentiels $\partial_1 J$. Enfin, un sous-différentiel étant toujours convexe, on en déduit la proposition.

Proposition 2. Soit $h \in U - u$ et $t_n \to 0^+$ (ou $t_n \searrow 0$) quand $n \to \infty$, et $v_n \in \hat{V}(u + t_n h)$. Alors $v_n \to \hat{V}(u)$.

Preuve. Puisque V est compact, soit $\bar{v}$ un point d'accumulation de v_n. Soit $\hat{v} \in \hat{V}(u)$. On a:

$$J(u, \bar{v}) \geq \limsup J(u + t_n h, v_n) \geq \limsup J(u + t_n h, \hat{v}) = J(u, \hat{v}) = \bar{J}(u).$$

La première inégalité à cause de la remarque sur la semi-continuité de J, la deuxième par définition de v_n. La continuité de J en u et la définition de $\hat{v}$ donnant les deux égalités. Donc $J(u, \bar{v}) = \bar{J}(u)$, ce qui démontre la proposition.

Proposition 3. Soient h, t_n et v_n comme ci-dessus, et $p_n \in \partial_1 J(u+t_nh, v_n)$. Alors, il existe $\hat{v} \in \hat{V}(u)$ tel que

$$\limsup(p_n, h) \le \sup_{p \in \partial_1 J(u,\hat{v})} (p,h) = D_1 J(u,\hat{v};h).$$

Preuve. Soit $L = \limsup(p_n, h)$, et p_m une sous-suite telle que $(p_m, h) \to L$. Soit $v_m \in \hat{V}(u+t_mh)$, et a nouveau une sous-suite indicée par k telle que $v_k \to \hat{v} \in \hat{V}(u)$. Posons $D = D_1 J(u,\hat{v};h)$.

Soit $\epsilon > 0$ fixé. La pente $[J(u+th,\hat{v}) - J(u,\hat{v})]/t$ étant, pour une fonction convexe, décroissante quand t décroit vers zéro, cette fonction admet une dérivée directionnelle et

$$\exists \tau > 0 : \forall t < \tau, \quad J(u+th,\hat{v}) < J(u,\hat{v}) + t(D+\epsilon). \tag{2.1}$$

Par ailleurs, on a toujours

$$\forall t, \quad J(u+t_kh+th, v_k) \ge J(u+t_kh, v_k) + t(p_k, h) \ge J(u+t_kh,\hat{v}) + t(p_k,h).$$

Soit, en passant à la limsup, et avec le caractère s.c.s. de J:

$$J(u+th,\hat{v}) \ge J(u,\hat{v}) + t\limsup(p_k,h) = J(u,\hat{v}) + tL.$$

Ainsi, en comparant cette dernière inégalité avec (2.1), pour $t < \tau$, on aboutit à $L < D+\epsilon$. Ce qui prouve la proposition.

Proposition 4.

$$\sup_{\bar{p} \in \partial \bar{J}(u)} (\bar{p}, h) \le \sup_{\substack{v \in \hat{V}(u) \\ p \in \partial_1 J(u,v)}} (p,h).$$

Preuve. Le sous-différentiel est un opérateur croissant:

$$\forall \bar{p}_n \in \partial\bar{J}(u+t_nh),\ \forall \bar{p} \in \partial\bar{J}(u), \quad (\bar{p}_n, h) \ge (\bar{p}, h),$$

soit en particulier

$$\inf_{\bar{p}_n \in \partial \bar{J}(u+t_nh)} (\bar{p}_n, h) \ge \sup_{\bar{p} \in \partial \bar{J}(u)} (\bar{p}, h).$$

De plus, en utilisant la proposition 1 en $u+t_nh$, on a, avec les mêmes notations que ci-dessus:

$$\inf_{\bar{p}_n \in \partial \bar{J}(u+t_nh)} (\bar{p}_n, h) \le \inf_{p_n \in \partial_1 J(u+t_nh, v_n)} (p_n, h).$$

Soit en regroupant ces deux inégalités:

$$\sup_{\bar{p} \in \partial \bar{J}(u)} (\bar{p}, h) \le (p_n, h) \quad \forall p_n \in \partial_1 J(u+t_nh, v_n).$$

En utilisant la proposition 3, on obtient qu'il existe $\hat{v} \in \hat{V}(u)$ tel que

$$\sup_{\bar{p} \in \partial \bar{J}(u)} (\bar{p}, h) \le \sup_{p \in \partial_1 J(u,\hat{v})} (p,h),$$

et donc a fortiori l'inégalité de la proposition 4.

Maintenant, la proposition 4 entraine l'inclusion opposée de celle démontrée en proposition 1, et l'égalité est ainsi démontrée, achevant de prouver le théorème.

2.2 LE CAS SANS COMPACITÉ.

Nous reprenons les hypothèses C, mais *sans l'hypothèse* C0 *de compacité* et de semi-continuité supérieure.

Le lemme 1 subsiste moyennant une précision que nous apportons ci-dessous, et la relation avec l'hypothèse C2a peut être précisée comme suit.

Lemme 2. *L'ypothèse C2 peut être remplacée par C2a et l'hypothèse qu'il existe* $\bar{J}(u_0) \leq \infty$. *De plus, les hypothèses C1 et C2 impliquent que, si* $u_n \to u \in U_0$, $\{v_n\} \in \mathcal{W}(u)$ *et* $p_n \in \partial_1 J(u_n, v_n)$, *alors* $\limsup \|p_n\| \leq \infty$.

Démonstration. La deux première affirmation est démontrée dans le lemme 1. Soit maintenant u fixé dans U. Rappelons que par C2, J est continue en u uniformément en v. Soit $\rho > 0$ tel que la boule $B(u, 2\rho)$ soit incluse dans $\tilde{U}$. Soit h dans U, de norme égale à ρ. Pour n suffisamment grand, $u_n + h \in \tilde{U}$, et donc

$$a \geq J(u_n + h, v_n) \geq J(u_n, v_n) + (p_n, h) \geq J(u, v_n) - \epsilon_n + (p_n, h)$$

où ϵ_n tend vers zéro indépendamment de v_n du fait de la continuité uniforme en u. Puis, en se souvenant que par hypothèse $\{v_n\} \in \mathcal{W}(u)$,

$$a \geq \bar{J}(u) - \eta_n - \epsilon_n + (p_n, h),$$

où à nouveau η_n tend vers zéro. On a donc

$$(p_n, h) \leq a - \bar{J}(u) + \epsilon_n + \eta_n.$$

d'où,

$$\limsup \|p_n\| \leq \frac{a - \bar{J}(u)}{\rho}.$$

En effet, s'il en etait autrement, soit $\delta > 0$ tel que $\limsup \|p_n\| > (a - \bar{J}(u))/\rho + 2\delta$, N tel que pour $n > N$, $\epsilon_n + \eta_n < \delta\rho$, et $k > N$ tel que $\|p_k\| > (a - \bar{J}(u))/\rho + \delta$. Soit alors $\bar{u}_k \in U$ de norme unité tel que $(p_k, \bar{u}_k) = \|p_k\|$, en prenant $h = \rho\bar{u}_k$, on obtient une contradiction avec l'inégalité ci- dessus.

Pour pouvoir énoncer le théorème suivant de manière lisible, nous introduisons une définition.

Définition. Soit $\mathcal{U}'$ le dual topologique de $\mathcal{U}$ et $\{\mathcal{D}_n\}$ une suite de sous-ensembles de $\mathcal{U}'$. On désigne par $\limsup \mathcal{D}_n$ l'ensemble des limites en topologie faible étoile de suites $\{d_n\}$ d'éléments de $\mathcal{D}_n$. Ce que nous noterons

$$\limsup_{n\to\infty} \mathcal{D}_n = \left\{ d \mid \exists d_n \in \mathcal{D}_n : d_n \xrightarrow{\star} d \right\}.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant:

Théorème C2. *Sous les hypothèses C1 et C2, la fonction $\bar{J}$ admet en tout point $u \in U_0$ un sous-différentiel donné par la formule ci-desous:*

$$\partial \bar{J}(u) = \overline{\text{co}} \bigcup_{\{v_n\} \in \mathcal{W}(u)} \limsup_{n \to \infty} \partial_1 J(u, v_n).$$

Remarque. La formule ci-dessus peut aussi s'ecrire, sans introduire la limsup d'ensembles:

$$\partial \bar{J}(u) = \overline{\text{co}} \bigcup_{\{v_n\} \in \mathcal{W}(u)} \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=k}^{\infty} \partial_1 J(u, v_n)}.$$

Mais cette formule ne brille pas par sa clarté.

Démonstration. On voit comme au théorème C1 que $\bar{J}$ est convexe continue sur U. Posons en définition

$$\mathcal{D} = \bigcup_{\{v_n\} \in \mathcal{W}(u)} \limsup_{n \to \infty} \partial_1 J(u, v_n).$$

Notons que par le lemme 2, $\mathcal{D}$ est borné.

Proposition 1. $\partial \bar{J}(u) \supset \overline{\text{co}} \mathcal{D}$

Preuve. Soit $\tilde{p} \in \mathcal{D}$. Par définition, il existe une suite maximisante $\{v_k\}$ et une suite $p_k \in \partial_1 J(u, v_k)$ telles que $p_k \stackrel{*}{\rightharpoonup} \tilde{p}$. On a, $\forall h$

$$\bar{J}(u + h) \geq J(u + h, v_k) \geq J(u, v_k) + (p_k, h) = \bar{J}(u) - \epsilon_k + (p_k, h),$$

où $\epsilon_k \to 0$, d'où en pasant à la limite

$$\bar{J}(u + h) \geq \bar{J}(u) + (\tilde{p}, h),$$

donc $\mathcal{D}$ est contenu dans $\partial \bar{J}(u)$, mais comme celui-ci est convexe, la proposition est démontrée.

Proposition 2. Soit $t_n \searrow 0$, $\epsilon_n \searrow 0$, et v_n tel que $J(u + t_n h, v_n) \geq \bar{J}(u + t_n h) - \epsilon_n$, et enfin $p_n \in \partial_1 J(u + t_n h, v_n)$. Alors $\{v_n\} \in \mathcal{W}(u)$.

Preuve. On a

$$\bar{J}(u) \geq J(u, v_n) \geq J(u + t_n h, v_n) - t_n(p_n, h) \geq \bar{J}(u + t_n h) - \epsilon_n - t_n(p_n, h).$$

Soit $p \in \partial \bar{J}(u)$, dont on a vu qu'il existe. En s'en servant pour majorer la dernière occurence de $\bar{J}$ ci-dessus, il vient finalement

$$\bar{J}(u) \geq J(u, v_n) \geq \bar{J}(u) - t_n(p, h) - \epsilon_n - t_n(p_n, h).$$

Par le lemme 2 p_n est borné. D'où la proposition.

Proposition 3. Soient t_n, ϵ_n, v_n comme à la proposition 2. Soit en outre
$$D = \sup_{\tilde{p}\in\mathcal{D}}(\tilde{p}, h) \quad \text{et} \quad D_n = \sup_{p_n\in\partial_1 J(u,v_n)}(p_n, h).$$
Alors $\limsup D_n \leq D$.

Preuve. Pour tout n, on peut choisir $\hat{p}_n \in \partial_1 J(u, v_n)$ tel que $D_n \geq (\hat{p}_n, h) \geq D_n - \epsilon_n$. Donc
$$\limsup D_n = \limsup(\hat{p}_n, h).$$
Mais en extrayant une sous-suite $\hat{p}_k$ des $\hat{p}_n$ telle que $(\hat{p}_k, h) \to \limsup(\hat{p}_n, h)$, et à nouveau, par le lemme 2, une sous-suite des p_k convergente en topologie faible étoile, disons vers $\tilde{p} \in \mathcal{D}$, on obtient
$$\limsup(\hat{p}_n, h) = (\tilde{p}, h) \leq D.$$
Ce qui montre la proposition.

Proposition 4. Soit $t_n \searrow 0$, et pour chaque n, $\{v_n^k\}_k \in \mathcal{W}(u + t_n h)$. Posons
$$\mathcal{D}_n = \limsup_{k\to\infty} \partial_1 J(u + t_n h, v_n^k)$$
Alors, si $\tilde{p}_n \in \mathcal{D}_n$, on a
$$\limsup(\tilde{p}_n, h) \leq D = \sup_{\tilde{p}\in\mathcal{D}}(\tilde{p}, h).$$

Preuve. Soit $p_n \in \mathcal{D}_n$. Choisisons $\{v_n^k\}_k \in \mathcal{W}(u + t_n h)$ et $p_n^k \in \partial_1 J(u + t_n h, v_n^k)$ tels que $p_n^k \xrightarrow{*} \tilde{p}_n$. Choisissons aussi k_n tel que, pour une suite $\epsilon_n \searrow 0$ fixée, on ait en posant $v_n^{k_n} = v_n$ et $p_n^{k_n} = p_n$,
$$J(u + t_n h, v_n) \geq \bar{J}(u + t_n h) - \epsilon_n \quad \text{et} \quad |(p_n - \tilde{p}_n, h)| \leq \epsilon_n.$$
La suite $\{v_n\}$ est du type introduit à la proposition 2, et en particulier, est dans $\mathcal{W}(u)$. De plus, quelque soit $\alpha > 0$, on a
$$J(u + t_n h + \alpha h, v_n) \geq J(u + t_n h, v_n) + \alpha(p_n, h) \geq \bar{J}(u + t_n h) + \alpha(\tilde{p}_n, h) - 2\epsilon_n,$$
soit encore, pour $\tilde{p} \in \mathcal{D}$, donc $\tilde{p} \in \partial\bar{J}(u)$ par la proposition 1,
$$J(u + t_n h + \alpha h, v_n) \geq \bar{J}(u) + t_n(\tilde{p}, h) - 2\epsilon_n + \alpha(\tilde{p}_n, h).$$
Par ailleurs, posons
$$D_n = \sup_{\hat{p}_n\in\partial_1 J(u,v_n)}(\hat{p}_n, h).$$
Quelque soit $\eta > 0$, il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout α positif, $\leq \alpha_0$, on ait,
$$J(u + \alpha h, v_n) < J(u, v_n) + \alpha(D_n + \eta) \leq \bar{J}(u) + \alpha(D_n + \eta).$$
Comme J est continue en u uniformément en v, pour n assez grand, on a
$$J(u + t_n h + \alpha h, v_n) \leq J(u + \alpha h, v_n) + \epsilon_n.$$
D'où en regroupant les trois dernières lignes d'inégalités établies
$$\exists\alpha_0 > 0 : \forall\alpha \in [0, \alpha_0], \quad \alpha(D_n + \eta) \geq \alpha(\tilde{p}_n, h) - 3\epsilon_n.$$
en passant à la limsup, en utilisant la proposition 3, il vient finalement
$$D + \eta \geq \limsup(\tilde{p}_n, h)$$
ce qui montre la proposition puisque η était arbitraire.

Proposition 5. $\partial\bar{J}(u) \subset \overline{\mathrm{co}}\mathcal{D}$

Preuve. Soit $\bar{p} \in \partial\bar{J}(u)$. Comme l'opérateur $\partial\bar{J}$ est monotone,

$$\forall \bar{p}_n \in \partial\bar{J}(u + t_n h), \quad (\bar{p}, h) \leq (\bar{p}_n, h).$$

Donc,

$$(\bar{p}, h) \leq \inf_{\bar{p}_n \in \partial\bar{J}(u+t_n h)} (\bar{p}_n, h) \leq \inf_{\tilde{p}_n \in \mathcal{D}_n} (\tilde{p}_n, h)$$

en utilisant la proposition 1. Enfin, en passant à la limsup et en utilisant la proposition 4,

$$\forall \bar{p} \in \partial\bar{J}(u), \quad (\bar{p}, h) \leq \sup_{\tilde{p} \in \mathcal{D}} (\tilde{p}, h).$$

Donc $\bar{p} \in \overline{\mathrm{co}}\mathcal{D}$, le résultat est démontré.

Enfin, les propositions 1 et 5 ensemble prouvent le théorème.

3. LE CAS CONVEXE CONCAVE.

On introduit une hypothèse nouvelle:

Hypothèse CC. V est un sous-ensemble convexe d'un espace de Banach, et $\forall u \in U$, $\quad v \mapsto J(u, v)$ est concave.

Remarque. Dans ces conditions, si l'espace $\mathcal{V}$ est reflexif, dans l'hypothèse C0 la compacité de V peut être remplacée par : V est fermé borné. Car le caractère concave de $v \mapsto J(u, v)$ assure que son caractère s.c.s. subsiste en topologie faible.

On peut alors simplifier les deux théorèmes précédents de la façon suivante.

Théorème CC1. *Sous les hypothèses C et CC, on a, en tout point u de U_0 :*

$$\partial\bar{J}(u) = \bigcup_{v \in \hat{V}(u)} \partial_1 J(u, v).$$

Démonstration. En vertu du théorème C1, il suffit de démontrer le résultat suivant.

Proposition. $\mathcal{D} = \bigcup_{v \in \hat{V}(u)} \partial_1 J(u, v)$ est convexe.

Preuve. Pour $i = 1, 2$, soit $v_i \in \hat{V}(u)$, et $p_i \in \partial_1 J(u, v_i)$. On sait que $\hat{V}(u)$ est convexe, et donc $\forall \lambda \in [0, 1]$, $w = \lambda v_1 + (1 - \lambda) v_2 \in \hat{V}(u)$. Posons aussi $q = \lambda p_1 + (1 - \lambda) p_2$. Soit $h \in U - u$. On a par l'hypothèse CC

$$J(u + h, w) \geq \lambda J(u + h, v_1) + (1 - \lambda) J(u, v_2) \geq \lambda J(u, v_1) + (1 - \lambda) J(u, v_2) + (q, h).$$

Et come par définition, $J(u, v_i) = \bar{J}(u)$,

$$J(u + h, w) \geq \bar{J}(u) + (q, h) = J(u, w) + (q, h)$$

Donc $q \in \partial_1 J(u, w)$, où $w \in \hat{V}(u)$. La proposition est démontrée, et donc aussi le théorème.

Théorème CC2. *Sous les hypothèse C1 et C2 (c'est à dire les hypothèses C sans compacité) et CC, on a en tout point u de U_0 :*

$$\partial \bar{J}(u) = \bigcup_{\{v_n\} \in \mathcal{W}(u)} \limsup_{n \to \infty} \partial_1 J(u, v_n).$$

Démonstration. À nouveau, il suffit de démontrer que

$$\mathcal{D} = \bigcup_{\{v_n\} \in \mathcal{W}(u)} \limsup_{n \to \infty} \partial_1 J(u, v_n)$$

est convexe. Pour le reste de cette démonstration, nous adoptons les notations suivantes. Pour $i = 1, 2$, soit $p^i \in \mathcal{D}$. Il existe $\{v_k^i\}_k \in \mathcal{W}(u)$ et $p_k^i \in \partial_1 J(u, v_k^i)$ tels que $p_k^i \stackrel{\star}{\rightharpoonup} p^i$. Pour $\lambda \in [0, 1]$, posons

$$w_k = \lambda v_k^1 + (1 - \lambda) v_k^2, \quad q = \lambda p^1 + (1 - \lambda) p^2, \quad q_k = \lambda p_k^1 + (1 - \lambda) p_k^2.$$

Proposition 1. $\{w_k\}_k \in \mathcal{W}(u)$.

Preuve. Par concavité, on a

$$J(u, w_k) \geq \lambda J(u, v_k^1) + (1 - \lambda) J(u, v_k^2) \to \bar{J}(u).$$

Proposition 2. Soit $\mathcal{C}_k$ une suite de convexe de U', et $\mathcal{C} = \limsup \mathcal{C}_k$. Soit $D_k = \sup(p_k, h)$ et $D = \sup(p, h)$, pour $p_k \in \mathcal{C}_k$ et $p \in \mathcal{C}$. Alors,
i) $\mathcal{C}_k$ est convexe
ii) $\limsup D_k \leq D$.

Preuve. La première affirmation se prouve de manière élémentaire. Quant à la deuxième, c'est en fait la proposition 3 de la démonstration du théorème C2.

Proposition 3. On utilise les notations introduites en tete de cette démonstration. Soit $\mathcal{C}_k = \partial_1 J(u, w_k)$, et $\mathcal{C} = \limsup \mathcal{C}_k$. Alors $q \in \mathcal{C}$

Preuve. On a comme au théorème précédent, $\forall \alpha > 0$,

$$J(u + \alpha h, w_k) \geq \lambda J(u + \alpha h, v_k^1) + (1 - \lambda) J(u + \alpha h, v_k^2)$$

soit

$$\forall \alpha, \quad J(u + \alpha h, w_k) \geq \lambda J(u, v_k^1) + (1 - \lambda) J(u, v_k^2) + \alpha(q_k, h).$$

Par la continuité uniforme de J, on peut en déduire

$$\forall \alpha, \quad J(u + \alpha h, w_k) \geq \bar{J}(u) - \epsilon_k + \alpha(q_k, h),$$

où ϵ_k est une suite décroissant vers zéro, indépendante de α et h.

Par aileurs, $\forall h, \forall \eta > 0, \exists \alpha_0 : \forall \alpha \in (0, \alpha_0)$,

$$J(u + \alpha h, w_k) \leq J(u, w_k) + \alpha(D_k + \eta) \leq \bar{J}(u) + \alpha(D_k + \eta).$$

D'où, en rapprochant les deux dernières inégalités, pour $\alpha \leq \alpha_0$,

$$(q_k, h) \leq D_k + \eta + \frac{\epsilon_k}{\alpha}$$

soit, par utilisation de la proposition 2,

$$(q, h) = \lim(q_k, h) \leq D + \eta.$$

Comme η était arbitraire, on en déduit $(q, h) \leq D$, et comme, par la proposition 2, $\mathcal{C}$ est convexe, la proposition 3 est démontrée.

Comme enfin, $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, $q = \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 \in \mathcal{D}$, et le théorème est démontré.

4. APPLICATION AU THÉORÈME DE VON NEUMAN SION.

Nous montrons ici que les théorèmes d'existence d'un point selle, ou tout le moins d'une valeur (infsup = supinf), à une fonction convexe concave sont une conséquence simple des théorèmes "convexe-concave" ci-dessus.

Le premier théorème ci-dessous est souvent appelé "de Von Neuman", bien que Von Neuman n'ait traité que le cas où U et V sont des simplexes de dimension finie et J est linéaire. (Cas des jeux matriciels). Sion [3] attribue une forme plus générale à Shiffman. Le deuxième est souvent appelé théorème de Sion, bien que celui-ci l'attribue à Kneser et à Fan. Sion [3] donne un traitement assez complet, et plus général de la question. On trouvera aussi un traitement élégant de ces deux théorèmes dans [4]. Par rapport à [3] ou [4], le traitement donné ici permet de se contenter de la topologie faible dans le théorème "de Von Neuman", (dans le cas d'espaces reflexifs), et donc de n'imposer que d'avoir U et V fermés bornés. Par contre, comme on utilise les sous-différentiels, on a besoin de la continuité dans une des deux variables jusque sur le bord de l'ensemble.

Nos hypothèses seront voisines de celles du chapitre précédent, mais pour plus de commodité, nous les énonçons à nouveau sous une forme adaptée.

Hypothèses VN.

VN1. U est convexe compact, contenu dans un ouvert $\tilde{U} \subset \mathcal{U}$, et $\forall v \in V$, la fonction $u \mapsto J(u, v)$ est convexe semi-continue inférieurement de $\tilde{U}$ dans $I\!R$. En outre J est bornée supérieurement uniformément en v sur un voisinage de tout point de U (dans $\tilde{U}$).

VN2. V est convexe, et $\forall u \in \tilde{U}$, la fonction $v \mapsto J(u, v)$ est concave.

VN3. V est (séquentiellement) compact, et $\forall u \in \tilde{U}$, la fonction $v \mapsto J(u, v)$ est semi-continue supérieurement.

Théorème VN1. *Sous les hypothèses VN1 à VN3, où la compacité de U et (ou) V peut être prise au sens de la topologie faible (si $\mathcal{U}$ et (ou) $\mathcal{V}$ sont reflexifs), la fonction J admet un point selle sur $U \times V$. C'est à dire qu'il existe $\hat{u} \in U$ et $\hat{v} \in V$ tels que*

$$\forall (u, v) \in U \times V, \quad J(\hat{u}, v) \leq J(\hat{u}, \hat{v}) \leq J(u, \hat{v}).$$

Remarque. L'existence d'un point selle implique notamment que

$$\min_{u \in U} \max_{v \in V} J(u, v) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} J(u, v) = J(\hat{u}, \hat{v}).$$

Démonstration. On est dans les conditions d'application du théorème CC1. En particulier, VN1 assure que $U \subset U_0$, où $\bar{J}$ est continue. Donc, $\bar{J}$ étant s.c.i. sur un compact, et on sait qu'elle garde son caractère s.c.i. en topologie faible, elle atteint son minimum en un point $\hat{u} \in U$. Donc il existe $\hat{p} \in \partial\bar{J}(\hat{u})$ tel que

$$\forall u \in U, \quad (\hat{p}, u - \hat{u}) \geq 0.$$

Mais par application du théorème CC1, il existe $\hat{v} \in \hat{V}(\hat{u})$ tel que $\hat{p} \in \partial_1 J(\hat{u}, \hat{v})$. d'où

$$J(\hat{u}, \hat{v}) \leq J(u, \hat{v}) - (\hat{p}, u - \hat{u}).$$

en se souvenant que $\hat{v} \in \hat{V}(\hat{u})$, on obtient l'inégalité de gauche du point selle, et en exploitant les deux inégalités ci-dessus celle de droite. le théorème est démontré.

Théorème VN2. *Sous les hypothèses VN1 et VN2, il existe $\hat{u} \in U$ tel que*

$$\sup_{v \in V} J(\hat{u}, v) = \min_{u \in U} \sup_{v \in V} J(u, v) = \sup_{v \in V} \min_{u \in U} J(u, v).$$

Démonstration. Remarquons d'abord qu'à nouveau, l' hypothèse VN1 garantit l'existence des min en u. En particulier, $\bar{J}$ admet un minimum en un point $\hat{u}$ de U. Soit

$$\hat{J} = \bar{J}(\hat{u}) = \min_{u \in U} \sup_{v \in V} J(u, v).$$

$\bar{J}$ étant une fonction convexe, il existe $\hat{p} \in \partial\bar{J}(\hat{u})$ tel que

$$\forall u \in U, \quad (\hat{p}, u - \hat{u}) \geq 0.$$

Par notre théorème CC2, il existe une suite maximisante $\{v_k\} \in \mathcal{W}(\hat{u})$ et une suite $\{p_k\}$ avec $p_k \in \partial_1 J(\hat{u}, v_k)$, telles que $p_k \xrightarrow{\star} \hat{p}$. Ce qui donne

$$\forall u \in U, \quad J(u, v_k) \geq J(\hat{u}, v_k) + (p_k, u - \hat{u}) \geq \hat{J} + (p_k, u - \hat{u}) - \epsilon_k,$$

où $\epsilon_k \to 0$. Par ailleurs, on sait par le lemme 2 que $\|p_k\|$ est bornée.

Soit ϵ positif donné. Pour tout u dans U, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}(u)$ et un entier n tels que

$$\forall \tilde{u} \in \mathcal{O}(u), \forall k \geq n, \quad (p_k, \tilde{u} - \hat{u}) \geq (p_k, u - \hat{u}) - \frac{\epsilon}{3} \geq (\hat{p}, u - \hat{u}) - 2\frac{\epsilon}{3} \geq -2\frac{\epsilon}{3}.$$

Comme U est compact, on peut extraire un recouvrement fini des $\mathcal{O}(u)$. Soit N le max des n correspondants. Alors,

$$\forall u \in U, \forall k \geq N, \quad (p_k, u - \hat{u}) \geq -2\frac{\epsilon}{3}.$$

car u apartient à l'un des $\mathcal{O}(u)$ du recouvrement fini. Choisissons alors $K \geq N$ et tel aussi que $J(\hat{u}, v_K) \geq \hat{J} - \epsilon/3$, et on obtient, en utilisant l'inégalité ci-dessus :

$$\forall u \in U, \quad J(u, v_K) \geq J(\hat{u}, v_K) + (p_K, u - \hat{u}) \geq \hat{J} - \epsilon.$$

Donc $\min_{u \in U} J(u, v_K) \geq \hat{J} - \epsilon$, et a fortiori, $\sup_{v \in V} \min_{u \in U} J(u, v) \geq \hat{J} - \epsilon$.

Comme ϵ était choisi arbitrairement, le théorème s'en suit.

On peut en déduire un corollaire, trivial mais peut-être utile:

Corollaire. *Sous les hypothèses VN1 et VN2, si $\hat{U} \subset U$,*

$$\sup_{v \in V} \inf_{u \in \hat{U}} J(u,v) = \inf_{u \in \hat{U}} \sup_{v \in V} J(u,v).$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la continuité de J et de $\bar{J}$, et d'appliquer le théorème précédent à la fermeture $\bar{U}$ de $\hat{U}$.

Nous avons ainsi montré que les théorèmes de Von Neuman et de Sion sont des conséquences directes de versions "convexe-concave" du théorème de Danskin. Il nous semble que cela ne constitue que des exemples d'applications de résultats qui peuvent être utiles dans d'autres contextes.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. M. Danskin, **The Theory of Max Min**, Springer, Berlin, 1967.

[2] J. Von Neuman & O. Morgenstern, **Theory of Games and Economic Behaviour**, Princeton University Press, Princeton, 1947.

[3] M. Sion, *On General Minimax Theorems*, **Pacific Jal. of Mathematics, vol 8**, 1958, pp 171–176.

[4] J. P. Aubin **Analyse fonctionnelle appliquée**, PUF, Paris, 1987.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

ISSN 0249-6399